Théorème de Riesz - Fischer

Théorème : Pour tout $p \in [1,+\infty]$, L^p est un espace de Banach.

Démonstration :

• Si $p = +\infty$: Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^∞. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on fixe un entier $N_k > 0$ tel que $\|f_m - f_n\|_\infty < \frac{1}{k}$ pour tous $m, n \geq N_k$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on fixe donc un ensemble négligeable E_k tel que, pour tous $x \in \Omega \setminus E_k$ et $m, n \geq N_k$, on ait $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}$.
On pose $E = \bigcup_k E_k$, qui est un ensemble négligeable. Pour tout $x \in \Omega \setminus E$, la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ (qui est complet pour $|.|$), donc converge vers $f(x) \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \Omega \setminus E$ et tout $n \geq N_k$, on a donc $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}$. La fonction f est donc dans L^∞ et vérifie, pour tout $n \geq N_k$, $\|f - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}$, donc f_n tend vers f dans L^∞.

• Si $p \in [1,+\infty[$: Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^p.
Pour montrer que (f_n) converge, on remarque qu'il suffit de montrer qu'elle possède une valeur d'adhérence. On commence par fixer une extraction φ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $\|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^n}$.

On construit φ par récurrence : on commence par choisir $\varphi(1) \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tous $p, q \geq \varphi(1)$, on ait $\|f_p - f_q\| \leq \frac{1}{2}$. On continue alors en prenant $\varphi(2) > \varphi(1)$ tel que pour tous $p, q \geq \varphi(2)$, on ait $\|f_p - f_q\| \leq \frac{1}{2^2}$.

La suite de la récurrence est effectuée de façon analogue.

On pose alors $g_n : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} |f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x)|$, qui vérifie $\|g_n\|_{L^p} \leq 1$

par inégalité de Minkowski. Par théorème de convergence monotone, la suite (g_n) converge presque partout vers $g \in L^p$.

De plus, pour $m \geq n \geq 2$, on a $|f_{\varphi(m)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)| \leq \sum_{i=n}^{m-1} |f_{\varphi(i+1)}(x) - f_{\varphi(i)}(x)|$

$\leq g(x) - g_{n-1}(x)$

La suite $(f_{\varphi(n)}(x))$ est donc de Cauchy pour presque tout x, et converge donc vers $f(x)$, donc la suite $(f_{\varphi(n)})$ converge presque partout vers $f \in L^p$.

Pour tout $n \geq 2$ et presque tout x, on a donc $|f(x) - f_{\varphi(n)}(x)| \leq g(x)$.

Le théorème de convergence dominée donne alors $\|f - f_{\varphi(n)}\|_{L^p} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Etant donné qu'une suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence, on a $f_n \longrightarrow f$ dans L^p,

ce qui achève la preuve.